×22×

E.N.S. ST CLOUD & FONTENAY (OPTION Sc. Physiques) 1977

MATHEMATIQUES I

DURÉE : 4 heures

$\mathbb{R}$ désigne le corps des nombres réels, $\mathbb{N}$ l'ensemble des entiers positifs ou nul.

A chaque nombre réel λ on associe l'équation différentielle linéaire du second ordre :

$$(F_\lambda) \qquad y''(x) + \left(\lambda - \frac{x^2}{4}\right) y(x) = 0.$$

On dira qu'une fonction y à valeurs réelles, définie et deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$ est une fonction propre associée à λ, si elle possède les deux propriétés suivantes :

a. y est solution sur $\mathbb{R}$ de l'équation (F_λ).

b. $y(0) = 0$ et $\lim_{x \to +\infty} y(x) = 0$.

S'il existe une fonction propre non identiquement nulle associée à λ, on dira que λ est valeur propre.

Le résultat suivant est nécessaire à la résolution de plusieurs questions et sera admis :

Étant donnés quatre nombres réels λ, x_0, α et β, il existe une et une seule fonction y à valeurs réelles, deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$, telle que y est solution sur $\mathbb{R}$ de (F_λ), $y(x_0) = \alpha$ et $y'(x_0) = \beta$.

On désignera en particulier par f_λ la solution de (F_λ) sur $\mathbb{R}$ telle que $f_\lambda(0) = 0$ et $f'_\lambda(0) = 1$.

I

1° Étudier la parité de f_λ.

2° Montrer que λ est valeur propre si et seulement si $\lim_{x \to +\infty} f_\lambda(x) = 0$ et que, de plus, si λ est valeur propre, les fonctions propres associées à λ sont les fonctions proportionnelles à f_λ.

3° *a.* On pose

$$g_\lambda(x) = e^{\frac{x^2}{4}} f_\lambda(x) \qquad (\lambda \in \mathbb{R},\ x \in \mathbb{R}).$$

Montrer que g_λ est l'unique fonction à valeurs réelles, deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$, telle que $g_\lambda(0) = 0$, $g'_\lambda(0) = 1$ et qui est solution de l'équation :

$$(G_\lambda) \qquad y''(x) - xy'(x) + \left(\lambda - \frac{1}{2}\right) y(x) = 0.$$

b. Caractériser de même la fonction h_λ, obtenue en posant $h_\lambda(x) = e^{-\frac{x^2}{4}} f_\lambda(x)$, à l'aide de l'équation :

$$(H_\lambda) \qquad y''(x) + xy'(x) + \left(\lambda + \frac{1}{2}\right) y(x) = 0.$$

II

1° La valeur du paramètre λ étant fixée dans cette question et la suivante, on considère la suite (α_p), $p \geqslant 0$, de nombres réels, définie par :

$$\begin{cases} \alpha_0 = 1 \\ \alpha_{p+1} = \dfrac{2p + \dfrac{3}{2} - \lambda}{(2p+3)(2p+2)}\, \alpha_p \quad \text{pour} \quad p \geqslant 0. \end{cases}$$

Montrer que la série $\sum_{p=0}^{\infty} \alpha_p x^{2p+1}$ est convergente pour tout $x \in \mathbb{R}$ et que sa somme est égale à $g_\lambda(x)$.

2° Soit $k_0 \in \mathbb{N}$ tel que $k_0 \geqslant \lambda$.

a. Établir les inégalités :

$\forall p \geqslant k_0 + 1$,

$$|\alpha_p| \geqslant \left(\frac{1}{2}\right)^{p-k_0} \frac{|\alpha_{k_0}|}{(2k_0+2)(2k_0+4)\ldots(2p)} \geqslant \frac{|\alpha_{k_0}|}{4^p(p!)}$$

.../...

b. En déduire qu'il existe un polynôme P de degré $2k_0 - 1$ tel que

$$\forall x \geqslant 0, \quad \left| \sum_{p=k_0}^{\infty} \alpha_p x^{2p+1} \right| \geqslant |\alpha_{k_0}| \, x e^{\frac{x^2}{4}} + P(x).$$

3° On pose $\lambda_k = 2k + \frac{3}{2}$ $(k \in \mathbb{N})$. Déduire des deux questions précédentes que λ est valeur propre si et seulement si λ est égal à l'un des termes de la suite (λ_k), $k \in \mathbb{N}$. Calculer f_{λ_0} et f_{λ_1}.

III

On pose dans la suite $F_k = f_{\lambda_k}$, $G_k = g_{\lambda_k}$, $H_k = h_{\lambda_k}$.

1° En utilisant la question (I. 3°), montrer que pour $k \in \mathbb{N}$, il existe un nombre c_k, tel que : $G_k = c_k G''_{k+1}$. Déterminer la constante c_k.

2° De même, montrer qu'il existe une constante d_k telle que $H_{k+1} = d_k H''_k$ $(k \in \mathbb{N})$.

Établir ensuite que $d_k = -\frac{1}{2k+3}$

(Utiliser un développement limité à l'ordre 3 à l'origine de H_k pour en déduire $H'''_k(0)$).

3° Déduire de la question précédente que :

$$\forall k \in \mathbb{N} \quad F_k(x) = \frac{(-1)^{k+1}}{1 \cdot 3 \ldots (2k+1)} e^{\frac{x^2}{4}} \frac{d^{2k+1}}{dx^{2k+1}} \left(e^{-\frac{x^2}{2}} \right)$$

IV

1° Montrer que F_k possède au plus $k+1$ zéros sur la demi-droite $[0, \infty[$.

2. *a.* Soient $\alpha \in \mathbb{R}$, $k \in \mathbb{N}$ tels que $F_k(\alpha) = 0$. Montrer que $F'_k(\alpha) \neq 0$.

b. Soient $\alpha \in \mathbb{R}$ et $\beta \in \mathbb{R}$ deux zéros consécutifs de F_k, $\alpha < \beta$. Montrer que le produit $F'_k(\alpha) \cdot F'_k(\beta)$ est strictement négatif.

3° *a.* Établir la relation :

$$(2k+3) F_{k+1}(x) = -\left(\frac{x^2}{2} - (2k+2) \right) F_k(x) + x F'_k(x),$$

$(x \in \mathbb{R}, k \in \mathbb{N})$

b. En déduire que si α et β sont deux zéros consécutifs de F_k tels que $0 < \alpha < \beta$, alors F_{k+1} s'annule au moins une fois sur l'intervalle ouvert $]\alpha, \beta[$.

c. Étendre la propriété *b.* ci-dessus au cas où $\alpha = 0$ puis au cas où $\beta = +\infty$.

4° Déduire des questions précédentes que F_k possède $k+1$ zéros sur la demi-droite $[0, +\infty[$. (Raisonner par récurrence.)

×23×

www.tunisie-etudes.info

Ce document a été téléchargé depuis
www.tunisie-etudes.info

Des documents gratuits, devoirs, examens, cours, exercices, corrigés... Ainsi que toute une rubrique pour vous aider à trouver un emploi sans oublier les avis de concours en direct

Notre page Twitter :
http://www.twitter.com/TunisieEtudes
Notre page FaceBook :
http://www.facebook.com/TunisieEtudes



Merci d'avoir choisi www.tunisie-etudes.info
Bonne lecture et bon travail